

Die BELL'sche Ungleichung in der Quantenmechanik

„Ein Quantensprung in der Erkenntnis“ – damit ist volkstümlich ein besonders großer Fortschritt der Wissenschaft gemeint. Leider sind Quantensprünge aber nun gerade die **kleinstmöglichen** Änderungen eines Zustandes! Deutlich sichtbar werden die Sprünge überhaupt erst auf dem mikroskopisch kleinen Maßstab der Atome. (Der Übergang von der mikroskopischen Quantenwelt zu unserer klassischen makroskopischen Welt muss an anderer Stelle besprochen werden).

Die (reale!) Quantenwelt verhält sich deutlich anders als unsere mit normalen Sinnen erfassbare makroskopische Welt. Ein auf einer Kreisbahn bewegtes (negativ geladenes) Elektron strahlt normalerweise Energie ab, etwa Radiowellen. Kreist es (bildlich gesprochen) um einen winzigen positiv geladenen Atomkern, so strahlt es aber offenbar nicht, da sonst das Elektron schließlich in den Kern fallen würde, die Atome also gar nicht stabil wären. Das Elektron kann sich in Kern-Nähe nur in bestimmten Abständen zum Kern aufhalten, die möglichen Abstände sind also „quantisiert“. Zwischen diesen möglichen Abständen müsste es unter Aufnahme oder Abgabe eines Energie-Quants springen. Dies wäre der Quantensprung.

Auch der innere Drehimpuls eines Elektrons, der „Spin“, ist quantisiert. Konstruieren wir uns einen sog. Polarisator, der Elektronen unterschiedlich stark vom Weg ablenkt, je nachdem, ob der Spin eher in Richtung „rauf“ oder in Richtung „runter“ relativ zur Polarisationsachse orientiert ist. Ein Elektronenstrahl, dessen Spins beliebig in alle Richtungen im Raum zeigen, und der einen punktförmigen Querschnitt aufweist, sollte dann hinter dem Polarisator zu einem linienförmigen Querschnitt in Polarisationsrichtung auseinander gezogen sein, je nach der ursprünglichen Spin-Orientierung der einzelnen Elektronen. Dies beobachtet man jedoch nicht: hinter dem Polarisator ist der Elektronenstrahl in zwei Strahlen aufgeteilt, mit jeweils wieder punktförmigem Querschnitt, je ein Teil-Strahl für Spin-Orientierung „rauf“ und „runter“, auch wenn die Elektronen vor dem Polarisator in den Spins keine vorgegebene Orientierung besaßen. Die Spins sind also quantisiert, können also nur jeweils in einem von genau zwei möglichen Zuständen beobachtet werden. Erst die Richtung des (makroskopischen) Polarisators definiert dabei in der Messung, was „rauf“ oder „runter“ bedeutet.

Und hier noch eine weitere unlogisch erscheinende Eigenschaft der Quantenobjekte. Vor der Messung mit dem Polarisator kann das einzelne Elektron in einem Zustand sein, der sich aus „rauf“ und „runter“ zusammensetzt, entsprechend „Schrödingers Katze“, die gleichzeitig tot und lebendig sein kann. Erst durch die Messung wird das Elektron in den jeweiligen eindeutigen Spin-Zustand gebracht.

Es wird aber noch unheimlicher. Stellen wir uns einen atomaren Prozess vor, bei dem zwei Elektronen gleichzeitig erzeugt und in entgegengesetzter Richtung ausgestoßen werden. Der Gesamtspin des Elektronenpaares sei Null, damit müssen die beiden Spins der einzelnen Elektronen jeweils entgegengesetzt zueinander stehen. Einstein, Podolsky und Rosen (EPR) haben sich nun 1935 (sinngemäß) gefragt, was passiert, wenn man den Spin eines der beiden Teilchen misst, nachdem diese schon weit auseinander geflogen sind. Angenommen, man stellt den ersten Polarisator auf einen beliebigen Winkel ein, und misst dort das erste Teilchen mit Spin=„rauf“. Dann müsste das entfernte zweite Teilchen durch die Messung am ersten Teilchen laut Quantenmechanik augenblicklich in den Zustand Spin=„runter“ gezwungen worden sein. Diese Information müsste also mit Überlichtgeschwindigkeit vom ersten zum zweiten Teilchen augenblicklich übertragen worden sein, scheinbar im Widerspruch zur Relativitätstheorie. Mit anderen Worten: die beiden Teilchen würden über beliebige Entfernungen miteinander fest verbunden sein, ähnlich wie ein starrer Körper. Diese Nichtlokalität würde noch allgemeiner bedeuten, dass alles in der Welt mit allem anderen unmittelbar zusammenhängt. Einstein folgerte, dass dies nicht möglich sei, und dass die beiden Teilchen also schon vor der Messung mit dem Polarisator wüssten, wie ihre (entgegengesetzten) Spins im Raum wirklich stehen. Diese Information wäre uns aber bislang verborgen, und da die Quantenmechanik nichts darüber aussagt, wäre die Quantenmechanik unvollständig.

Erst 1964 hat John Stewart Bell eine Ungleichung formuliert, mit der man feststellen könnte, ob solche verborgene Variable existierten, oder ob diese Nicht-Lokalität der Welt real sei.

Die BELL'sche-Ungleichung: Herleitung „zu Fuß“

Literatur: F. Schwabl, Quantenmechanik, Springer-Verlag 2007.
J.J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics, revised edition, Addison Wesley 1993.

1. Einführung: Dreiecksungleichung

Denken wir uns ein Dreieck mit Ecken A,B,C, und beliebigen Seitenlängen zwischen diesen Ecken $S(A,B)$, $S(B,C)$ und $S(C,A)$. (Natürlich ist dabei $S(B,C)=S(C,B)$ etc.).

Dann gilt offensichtlich die Dreiecksungleichung:

$$S(A,B) \leq S(A,C) + S(C,B)$$

wobei „ \leq “ bedeutet: „kleiner oder höchstens gleich“.

In Worten: Die zwei Seitenlängen $S(A,C)$ und $S(B,C)$ zusammengezählt sind in einem Dreieck offenbar nie kürzer als die dritte Seitenlänge $S(A,B)$, unabhängig davon, wie lang jede dieser Seiten einzeln ist. (Das klingt trivial, ist dies aber nur in ebener Geometrie, gilt also z.B. auf der Oberfläche einer Kugel schon nicht mehr).

2. Bedeutung der Bell-Ungleichung (J.S.Bell, Physics 1, 195 (1964))

Die Bell'sche Ungleichung für Beobachtungen von statistischen Korrelationen ist nun genauso mächtig und scheinbar trivial, wie diese obige Dreiecksungleichung. Man kann sich eigentlich gar nicht vorstellen, dass sie verletzt sein könnte, wenn man sich die folgende Herleitung klar macht!

Die Quantenmechanik verschränkter Teilchen verletzt aber diese Gleichung in der Tat, ein äußerst beunruhigendes Ergebnis für unser Verständnis von Realität und Logik.

3. Das Einstein-Podolsky-Rosen Argument

(A.Einstein, B.Podolsky, N.Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935)).

Zwei (Fermionen-Spin $\frac{1}{2}$ -) Teilchen mit entgegengesetzter, aber zunächst unbekannter (oder undefinierter?!) Spin-Orientierung, werden von einer gemeinsamen Quelle nach rechts bzw. links ausgesandt. In einiger Entfernung vom aussendenden Zentrum stellt man je einen Polarisator mit angeschlossenem Detektor auf. Beide Polarisatoren sollen unter einem bestimmten (für beide zunächst gleichen) Winkel α den jeweiligen Spin messen. Laut Quantenmechanik ist der Spin (z.B. eines Elektrons) quantisiert, es wird also jeweils nur einer von genau zwei möglichen Werten bei Messung beobachtet! (Dies ist zwar eigenartig, aber unbestritten!).

Wenn der eingestellte Winkel des Polarisators z.B. $\alpha=0$ Grad ist, wären die gemessenen Spin-Einstellungen also „rauf“ oder „runter“, bei Polarisationswinkel $\alpha=90$ Grad dann eben „rechts“ oder „links“. Diese beiden Spin-Einstellungen bezeichnen wir dann allgemeiner als +1 oder als -1, je nachdem, ob sich der Spin bei der Messung als parallel oder als antiparallel zum Polarisator ergibt.

Wenn für das rechte Teilchen (Polarisatorwinkel α) Spinrichtung = +1 gemessen wird, dann wird in der Tat beim linken Teilchen (wiederum Polarisator α) immer Spin = -1 gemessen. Einstein folgerte hieraus, dass beide Teilchen von Anfang an „wüssten“, wie ihr Spin im Raum stünde, also auch vor der Messung, auch wenn die Quantenmechanik diese Information erst nach der Messung liefern würde. Die Beschreibung der Quantenmechanik sei also unvollständig, es müssten verborgene Variable existieren, die die Information über die Orientierung der Teilchen-Spins im Raum enthielten.

Seien wir ehrlich: Wozu braucht man für so eine Schlussfolgerung einen Einstein, es ist doch ohnehin ganz klar, dass dies so sein muss!

4. Ein KLASSISCHES Experiment: Der Aufbau.

Nun: der Schein trägt! Machen wir zunächst folgendes (Gedanken-) Experiment für klassische (also nicht-quantenmechanische!) Teilchen. Wir stellen uns zwei Dart-Scheiben vor, als Zielscheiben (Abb.1). Dazu denken wir uns eine Maschine, die je zwei Dart-Pfeile abschießt, je einen nach rechts und nach links, so dass je ein Pfeil genau ins Zentrum je einer der beiden Dart-Scheiben trifft.



Abb 1. Dart-Scheiben: rot-blaue Schlitze Links $\alpha=180^\circ$ und „Rechts $\alpha=0^\circ$

Im Zentrum hat jede Scheibe ein kreisrundes Loch, von dem aus zwei Schlitze ein Stück nach außen gehen, so dass der Pfeil durchfliegen kann. Wenn er hinten herauskommt, stehen die Federchen immer genau in Richtung des Schlitzes. Die Schlitze sind in entgegengesetzter Richtung mit „rot“ bzw. „blau“ gekennzeichnet.

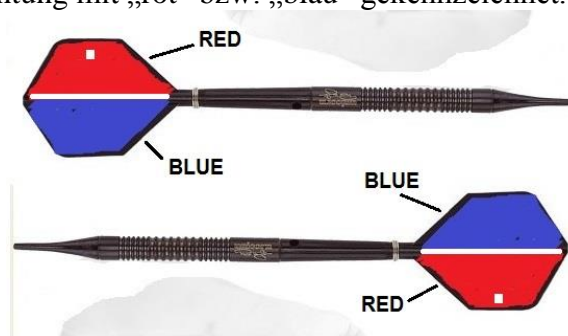


Abb. 2. Dart-Pfeile: Die Feder des nach links fliegenden Pfeils ist immer entgegengesetzt zur Feder des nach rechts fliegenden Pfeils orientiert

Die Dart-Pfeile haben am Ende entsprechend zwei Federn, die eine rot und, genau entgegengesetzt, die andere blau (Abb. 2). Fliegt ein Pfeil durch die Scheibe, misst eine Fotozelle, ob die rote Feder durch den roten Schlitz geht (rot-rot=“+1“), oder ob der Pfeil um 180° gedreht ist, also die rote Feder durch den blauen Schlitz geht (rot-blau=“-1“).

Beim Abschuss aus der Maschine ist außerdem die Orientierung der Feder der linken Pfeile um jeweils genau 180 Grad gegen die der zugehörigen nach rechts fliegenden Pfeile versetzt. Wenn diese Pfeile quantenmechanische Objekte wären, würde man sagen, ein nach rechts und ein dazugehöriger nach links fliegender Pfeil seien miteinander **verschränkt**. Die Orientierung der Federn im Raum dagegen ist zufällig.

Die Maschine wirft nacheinander je einen Pfeil gleichzeitig gegen die rechte und gegen die linke Scheibe, wobei die rote Feder am Ende aller nach rechts fliegenden Pfeile vorläufig immer in die gleiche Richtung zeigt, nennen wir sie ϕ . Die Richtung der roten Feder des jeweils linken Pfeils ist dann $\phi+180$ Grad. (Die Winkel-Drehung ist jeweils um die Flugrichtung des rechten Pfeils gemessen).

5. Nun geht's los:

Der rote Schlitz der rechten Scheibe wird nun jeweils auf einen von drei vorher festgelegten Winkeln α , β oder γ gestellt. Zwischen den drei Winkeln wird nach Zufallsprinzip dauernd abgewechselt. Der rote Schlitz der linken Scheibe wird entsprechend auf einen der entgegengesetzten Winkel $\alpha\sim$, $\beta\sim$, $\gamma\sim$ gestellt (Hier steht natürlich $\gamma\sim$ für $\gamma+180$ Grad, etc.) Dies geschieht aber unabhängig und von der jeweiligen Stellung der rechten Scheibe, und wieder zufällig gleichverteilt über die drei Winkel. Bei jedem Schuss notieren wir den Winkel jeder Scheibe, und rechts und links ob die rote Feder durch den roten (=“+1“) oder durch den blauen (=“-1“) Schlitz der Scheibe geht.

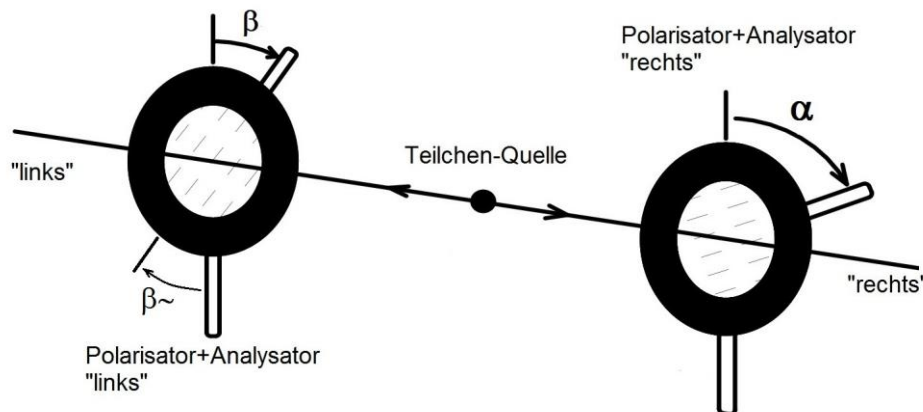


Abb. 3. Aufbau des EPR-Experiments mit zwei Polarisatoren („Dart-Scheiben“). Der Winkel $\beta\sim$ entspricht dem Winkel $\beta+180$ Grad.

Nehmen wir also einmal konkret an, dass die rechte Scheibe auf Winkel α steht und die linke Scheibe auf Winkel $\alpha\sim$. Wenn der rechte Pfeil durch die rechte Scheibe mit „rot-durch-rot“ geht, dann geht in diesem Fall der linke Pfeil zwangsläufig auch durch die linke Scheibe mit „rot-durch-rot“, da seine Feder um 180 Grad versetzt ist, und umgekehrt.

Nun nehmen wir anders an, dass die rechte Scheibe auf Winkel α steht und die linke Scheibe auf Winkel $\beta\sim$ (Abb. 3). Wenn beide Pfeile mit „rot-rot“ (Feder=Schlitz) durch die Scheiben gehen, dann machen wir einen Strich auf einer Liste „ $Q(\alpha+,\beta+)$ “, die wir nur für den jeweils nach **rechts** fliegenden Pfeil führen. Denn da der nach **links** fliegende durch die Scheibe $\beta\sim$ geflogen ist, wäre ja der nach rechts fliegende zwangsläufig durch eine rechte Scheibe β mit rot-rot durchgekommen! Ginge der linke Pfeil aber mit „rot-

blau“ durch die Scheibe, dann würden wir einen Strich auf der Korrelationsliste „ $Q(\alpha+, \beta-)$ “ machen.

Wir messen also jeweils einen Pfeil rechts und einen Pfeil links, aber tragen das Ergebnis so in diese Korrelationslisten ein, also ob wir zweimal am gleichen, rechten, Teilchen bzw. Pfeil gemessen hätten! Wir dürfen ja nicht zweimal am gleichen Pfeil messen, da nach Durchfliegen der ersten Scheibe die Feder des Pfeils genau die Orientierung des ersten Winkels hat, auch wenn sie vorher mal schräg dazu orientiert war. Man würde hier also aus der zweiten nachgeschalteten Scheibe nichts Neues lernen, daher müssen die Messungen jeweils getrennt (und gleichzeitig) am rechten und am linken Pfeil gemacht werden.

Da es für jede Winkelkombination eine Liste gibt, haben wir insgesamt zwölf solcher Strichlisten für drei Winkel (Feder vs. Schlitz: rot-rot = +, rot-blau = -):

$\alpha+\beta+$, $\alpha+\beta-$, $\alpha-\beta+$, $\alpha-\beta-$; $\beta+\gamma+$, $\beta+\gamma-$, $\beta-\gamma+$, $\beta-\gamma-$; $\alpha+\gamma+$, $\alpha+\gamma-$, $\alpha-\gamma+$, $\alpha-\gamma-$. Hier bedeutet natürlich z.B. „ $\beta-\gamma+$ “, dass der nach **rechts** fliegende Pfeil auf Winkel β gestoßen ist, aber die rote Feder durch den blauen Schlitz gekommen ist, während der nach **links** fliegende Pfeil auf γ mit rot-rot getroffen hat (was also „ $\gamma+$ “ für den nach **rechts** geflogenen Pfeil bedeuten würde!). Das klingt zunächst verwirrender als es eigentlich ist. Die roten Federn der beiden Pfeile zeigen eben immer in entgegengesetzte Richtungen. In der folgenden Tabelle ist ein einfaches Beispiel für die 12 Strichlisten gegeben.

Zeile Nr.	α	β	γ	2er-Korrelation, rechtes Teilchen	Zahlen-Beispiel:	Vorgriff auf <i>Tabelle 2</i> , Anzahl der Ereignisse
1	+	+		$Q(\alpha+ \beta+)$	= 15 Ereignisse	= M1+M2
2	+	-		$Q(\alpha+ \beta-)$	= 5	= M3+M4
3	-	+		$Q(\alpha- \beta+)$	= 5	= M5+M6
4	-	-		$Q(\alpha- \beta-)$	= 10	= M7+M8
5		+	+	$Q(\beta+ \gamma+)$	= 11	= M1+M5
6		+	-	$Q(\beta+ \gamma-)$	= 9	= M2+M6
7		-	+	$Q(\beta- \gamma+)$	= 7	= M3+M7
8		-	-	$Q(\beta- \gamma-)$	= 8	= M4+M8
9	+		+	$Q(\alpha+ \gamma+)$	= 12	= M1+M3
10	+		-	$Q(\alpha+ \gamma-)$	= 8	= M2+M4
11	-		+	$Q(\alpha- \gamma+)$	= 6	= M5+M7
12	-		-	$Q(\alpha- \gamma-)$	= 9	= M6+M8

Tabelle 1.

Erläuterung *Tabelle 1*, Beispiel Zeile 6: Hier ist ein „+“ in der Spalte β und ein „-“ in der Spalte γ . Also stand der rechte Polarisator auf Winkel β , der rechte Pfeil flog dort mit „rot-rot“ durch, während der linke Polarisator auf γ (also $\gamma+180^\circ$) stand, und der linke Pfeil mit „rot-blau“ durchging. Oder genauso gut umgekehrt (!): rechter Polarisator auf Winkel γ , Pfeildurchgang „rot-blau“; linker Polarisator auf Winkel β ($\beta=\beta+180^\circ$), links Pfeildurchgang „rot-rot“. Daher ist in der fünften Spalte $Q(\beta+, \gamma-)$ für diese Korrelation der Winkel β und γ vermerkt, wobei auch $Q(\beta+, \gamma-)=Q(\gamma-, \beta+)$ gilt. Insgesamt seien also 9 solcher Durchgänge beobachtet worden (Spalte 6). Die letzte Spalte 7 ergibt sich erst später aus der noch zu erstellenden *Tabelle 2* der Dreier-Kombinationen.

6. Auswertung

Die Hauptarbeit ist nun mit *Tabelle 1* getan, es folgen nur noch Umrechnungen! Aus diesen 12 Strichlisten können wir eine kompaktere *Tabelle 2* von nur noch 8 möglichen Dreier-Kombinationen konstruieren. Hierzu ist etwas Kombinatorik erforderlich, das Ergebnis lässt sich dann durch Eintragung in der letzten Spalte von *Tabelle 1* und Vergleich mit der vorletzten Spalte für die dortigen $Q(\alpha, \beta)$ -Werte gegenprüfen. Dies sei nun bereits geschehen, vergleichen wir also die beiden Tabellen.

Nehmen wir mal die Zeile mit dem Eintrag „M2“ in der ersten (und in der letzten) Spalte der *Tabelle 2*. Der Typ des rechten Teilchens ist als $[\alpha+, \beta+, \gamma-]$ bezeichnet, was bedeutet, dass das Teilchen (also der rechte Pfeil) durch die Winkel α und β „rot-rot“ durchgegangen wäre, durch γ aber „rot-blau“. Die oben gemessenen Korrelationen hätten dazu also ergeben: „ $\alpha+\beta+$ “, sowie „ $\beta+\gamma-$ “ und schließlich „ $\alpha+\gamma-$ “, daher die Einträge von „M2“ in der letzten Spalte von *Tabelle 1* in den Zeilen 1, 6 und 10. Für das linke Teilchen würden bei gleichen Winkeln natürlich genau die umgekehrten Ergebnisse herauskommen, also $[\alpha-, \beta-, \gamma+]$. (Siehe auch Buch von J. J. Sakurai).

Anzahl der Messungen	Typ des linken Teilchens	Typ des rechten Teilchens	Beispiel: Anzahl der „Ereignisse“
M1	$[\alpha-, \beta-, \gamma-]$	$[\alpha+, \beta+, \gamma+]$	M1= 8
M2	$[\alpha-, \beta-, \gamma+]$	$[\alpha+, \beta+, \gamma-]$	M2= 7
M3	$[\alpha-, \beta+, \gamma-]$	$[\alpha+, \beta-, \gamma+]$	M3= 4
M4	$[\alpha-, \beta+, \gamma+]$	$[\alpha+, \beta-, \gamma-]$	M4= 1
M5	$[\alpha+, \beta-, \gamma-]$	$[\alpha-, \beta+, \gamma+]$	M5= 3
M6	$[\alpha+, \beta-, \gamma+]$	$[\alpha-, \beta+, \gamma-]$	M6= 2
M7	$[\alpha+, \beta+, \gamma-]$	$[\alpha-, \beta-, \gamma+]$	M7= 3
M8	$[\alpha+, \beta+, \gamma+]$	$[\alpha-, \beta-, \gamma-]$	M8= 7

Tabelle 2.

Es gibt zwar u.U. mehrere mögliche Lösungen für die Kombination der Werte M1 bis M8 in Übereinstimmung mit *Tabelle 1*, was im Folgenden aber keine Rolle spielt. Alle M-Werte sind ganzzahlig positiv, oder Null. Die Summe über alle M1 bis M8 ist M. Anstatt von „Pfeilen“ sprechen wir ab jetzt von „Teilchen mit Spin“, und statt von Dart-Scheiben von (Polarisations-)Filtern.

Wir können aus *Tabelle 2* nun die relativen Häufigkeiten bestimmen, die wir - unter der obigen Annahme verborgener Parameter - bei Paarmessungen antreffen würden. Hierzu definieren wir neu: $N_{12}[\alpha+; \beta+] = (M3+M4)/M$ als die relative Häufigkeit, mit der das **rechte** Teilchen mit $\alpha+$ und gleichzeitig das **linke(!)** Teilchen mit $\beta+$ (jeweils „rot-rot“) gemessen würde. Ferner gilt offenbar: $N_{12}[\alpha+; \gamma+] = (M2+M4)/M$ und dazu $N_{12}[\gamma+; \beta+] = (M3+M7)/M$. Dies können wir zusammenfassen, und finden die

Bell'sche Ungleichung: $N_{12}[\alpha+; \beta+] \leq N_{12}[\alpha+; \gamma+] + N_{12}[\gamma+; \beta+]$ (Gl. 20.74),

wegen $(M3+M4)/M \leq (M2+M4)/M + (M3+M7)/M = (M3+M4+M2+M7)/M$, mit „ \leq “ gelesen als „kleiner oder gleich“. Alle Zahlen sind hier ja positiv und ganz. Es gehen nun also wieder nur noch die Korrelationen zwischen den beiden nach rechts und links fliegenden verschränkten Teilchen ein.

Wenn wir dieses Experiment für einen bestimmten Drehwinkel $\phi=\phi_1$ der Teilchen-Spins (bzw. der Pfeil-Federn!) gemacht haben, dann wiederholen wir es für beliebige andere feste Drehwinkel ϕ_2, ϕ_3 , etc. Offenbar ändern sich zwar die Werte M_1, M_2 , etc., aber nicht die Formel der Ungleichung. Für beliebige, aber durchaus verborgene, Drehwinkel ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , etc. der Teilchen-Spins müsste die Ungleichung also zwangsläufig erfüllt sein.

Aus obiger *Tabelle 2* wird klar, dass die Aussage der Bell'schen Ungleichung eigentlich genau so stark und „selbstverständlich“ ist, wie die der Dreiecksungleichung!

7. Spezielle Winkel

Nehmen wir ab jetzt Einfachheit halber an, dass der rechte Polarisator mit $\alpha=0$ senkrecht steht. Wenn dann auch links $\beta=\alpha=0$, dann folgt zwangsläufig $N_{12}[\alpha+; \beta+]=N_{12}[0+; 0+]=0$, da ja die beiden anfliegenden Teilchen wegen ihrer Verschränkung entgegengesetzt polarisiert sind. Setzen wir den linken Polarisator auf $\beta=180^\circ$, dann folgt leicht einsehbar $N_{12}[\alpha+; \beta+]=N_{12}[0+; 180^\circ+]=\frac{1}{2}$, da im Mittel das rechte Teilchen nur mit 50% Wahrscheinlichkeit $N_{12}=\frac{1}{2}$ mit Spin „rauf“ durch den Polarisator α fliegt, während gleichzeitig dann das linke Teilchen sicher mit Spin „runter“ als „+“ bei β vermerkt wird.

Wir führen kurz die Notation $W(\theta)=N_{12}[0+; \theta+]$ ein. Für beide gerade diskutierten Werte von θ liefert $W(\theta)$ sowohl im klassischen Fall wie im quantenmechanischen Fall das gleiche Ergebnis, also $W(0)=0$ bzw. $W(180^\circ)=\frac{1}{2}$.

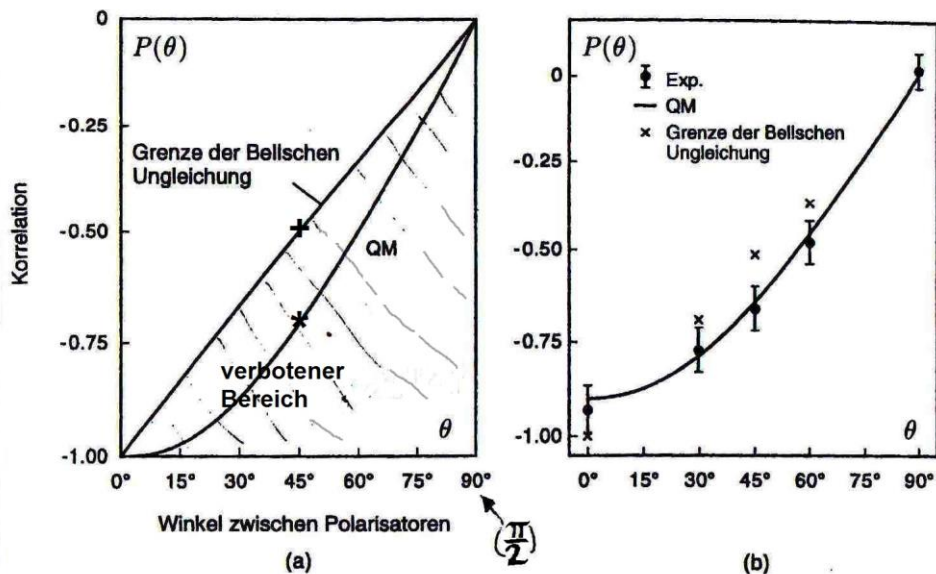


Abb. 20.6. (a) Korrelation $P(\theta) \equiv P(\theta; 0)$ nach der Quantentheorie (20.72'') und auf Grund der Bellschen Ungleichung. (b) Experimentelle Resultate für die Korrelation von Protonen nach Experimenten von Laméhi-Rachti und Mittig verglichen mit der Quantenmechanik (QM) und der Bellschen Ungleichung (x)¹⁰

¹⁰ Laméhi-Rachti, M., W. Mittig: Phys. Rev. D 14, 2543 (1976)

Aber nun wird es interessant: Nehmen wir jetzt für γ einen Zwischenwert an und zwar genau die Mitte, also $\gamma=90^\circ$. Dann ergibt die Bell'sche Ungleichung:
 $N_{12}[0+; 180^\circ+] \leq N_{12}[0+; 90^\circ+] + N_{12}[90^\circ+; 180^\circ+]$. Offenbar spielen aber die absoluten Winkel im Raum keine Rolle, sondern nur die Relativ-Winkel zwischen dem linken und dem rechten Polarisator. Damit können wir $N_{12}[90^\circ+; 180^\circ+]=N_{12}[0+; 90^\circ+]$

schreiben, und für diese speziellen Werte vereinfacht sich die Bell'sche Ungleichung zu $N_{12}[0+; 180^{\circ}+] \leq 2 * N_{12}[0+; 90^{\circ}+]$ oder anders: $N_{12}[0+; 90^{\circ}+] \geq \frac{1}{2} * N_{12}[0+; 180^{\circ}+]$, wobei „ \geq “ natürlich heißt „größer oder gleich“, also $W(90^{\circ}) \geq \frac{1}{2} * W(180^{\circ}) \geq \frac{1}{4}$. Wiederholen wir diese Operation, so bekommen wir: $N_{12}[0+; 90^{\circ}+] \leq N_{12}[0+; 45^{\circ}+] + N_{12}[45^{\circ}+; 90^{\circ}+] = 2 * N_{12}[0+; 45^{\circ}+]$, also für die Wahrscheinlichkeit $W(45^{\circ}) \geq \frac{1}{2} * W(90^{\circ}) \geq \frac{1}{4} * W(180^{\circ}) \geq \frac{1}{8}$.

Man kann diese Unterteilung immer weiter führen, und erhält so eine gerade Linie im Wahrscheinlichkeitsdiagramm $W(\theta)$, die den unteren, verbotenen, Teil vom oberen, erlaubten, Teil trennt! In Schwabls Buch **Abb. 20.6** ist dann noch $P(\theta) = 4 * W(\theta) - 1$ eingeführt worden, und somit speziell (klassisch): $P_{\text{klass}}(45^{\circ}) \geq 4 * \frac{1}{8} - 1 = -\frac{1}{2}$.

8. Quantenmechanisches Resultat

Ohne Herleitung schreiben wir hier nur das Ergebnis der Quantenmechanik für diese Korrelation auf: $N_{12}[0+; \theta+] = \frac{1}{2} \sin^2(\theta/2) = \frac{1}{2} * 0,146... = 0,073 < 0,125 = 1/8$, oder auch $P_{\text{QM}}(45^{\circ}) = -\cos(45^{\circ}) = -0,707 < -0,5$, also ist hier die Bell'sche Ungleichung verletzt!

Auch experimentell gilt inzwischen diese Verletzung der Bell'schen Ungleichung als gesichert, siehe hier **Abb. 20.6 a,b** aus Schwabls Buch. Dies bringt uns in offenbar ernste logische Erklärungsprobleme! **Die Annahme, dass die Orientierung der Teilchen-Spins im Raum schon vor der Messung festliegt, dass also (lokale) versteckte Variable existieren, ist in klarem Widerspruch zur Quantenmechanik dieser Teilchen.**

Die Tatsache, dass die Bell'sche Ungleichung durch die Quantenmechanik verletzt ist, heißt entweder, dass Realität erst durch Beobachtung (also Messung) existiert, und/oder dass die beiden Teilchen nach Abschuss aus dem Apparat eben doch über große Entfernungen augenblicklich aufeinander einwirken könnten, dass die Messung des einen Teilchens also erst den Zustand des anderen Teilchens definiert, Lokalität also nicht gegeben ist. Bei den Dart-Pfeilen ist dies sicher nicht der Fall, diese wären in Übereinstimmung mit der Bell'schen Ungleichung. Die Quantenmechanik aber sagt uns offenbar, dass die beiden verschränkten Teilchen auch über (vermutlich) beliebige Entfernungen noch miteinander fest in Verbindung stehen.

Dies erinnert übrigens auch an das Pauli-Ausschlussprinzip (vollständige Antisymmetrisierung der Vielteilchen-Wellenfunktion, aus relativistischer Dirac-Gleichung folgend), wonach keine zwei Fermionen in der Welt sich im gleichen Quantenzustand befinden dürfen.

*... We have always had a great deal of difficulty understanding the world view that quantum mechanics represents. At least I do, because I'm an old enough man that I haven't got to the point that this stuff is obvious to me. Okay, I still get nervous with it.... You know how it always is, every new idea, it takes a generation or two until it becomes obvious that there's no real problem. I cannot define the real problem, therefore I suspect there's no real problem, but I'm not sure there's no real problem.... *)*

*) Nobody in the 50 years since Einstein, Podolsky and Rosen has ever put it better than that: R.P. Feynman, Int. J. Theor. Phys. 21, 471 (1982).
(Zitiert nach N.D. Mermin, Physics Today, April 1985, p38) [H. Müller-Krumbhaar]