Bell-Ungleichung: „Executive“-Fassung

1) Die Quantenmechanik sagt: „Schrödingers Katze kann GLEICHZEITIG tot und lebendig sein“. Erst beim Messen (=Beobachtung) kommt sie in einen von zwei möglichen Zuständen. Vor der Messung war der Zustand also unbestimmt. Das heißt nicht, dass wir den Zustand nicht kennen, nein, er ist in seiner Existenz unbestimmt, sagt die Quantenmechanik. – Dies ist eine ähnliche (offenbar unsinnige) Aussage wie: „Der Mond ist erst am Himmel, wenn man hinschaut“. Einstein hat dies gar nicht gefallen.

2) Unser „gesunder Menschenverstand“ sagt uns dagegen, dass Objekte eine eigene Existenz haben, auch wenn wir sie nicht beobachten. Der Mond ist also immer da. Und Schrödingers Katze weiß also immer, ob sie lebendig oder tot ist, nur UNS ist diese Erkenntnis anfangs VERBORGEN. Die Quantentheorie ist also unvollständig, da sie uns diese offenbar existierende Information nicht liefert, sagte Einstein.

3) Wir wollen nun ein Experiment machen, um zwischen beiden inkompatiblen Aussagen (QM vs. Klassik) zu entscheiden. Hier laufen wir auf ein Problem: Wenn wir ein quanten-mechanisches (kleines) Objekt beobachten oder messen, dann verändern wir unweigerlich (unstrittig!) seinen Zustand! Das wollen wir aber erst mal nicht, wir wollen erst einmal Informationen über den Zustand eines Teilchens, ohne diesen Zustand dabei zu verändern. Die Information über diesen dann unveränderten Zustand ist durch irgend welche Größen charakterisiert, die wir im Prinzip messen könnten, aber dies nicht explizit tun wollen, um diese Größen nicht zu verändern. Wir bezeichnen diese Größen darum als VERBORGENE VARIABLE.

4) Wir wollen also solche verborgene Variable aufspüren, in denen die Information über den Zustand eines Objektes VOR der eigentlichen Beobachtung oder Messung gespeichert ist. Dazu suchen wir uns ein möglichst einfaches Objekt aus, beispielsweise ein Teilchen wie ein Elektron, bei dem der „Spin“ bei Messung nachweislich (!) immer nur einen von zwei Werten annehmen kann, wenn das Instrument die möglichen Orientierungen des Spins im Raum vorgibt (z.B. „Rauf“ vs. „Runter“ – tot oder lebendig). - Wie können wir aber die „eigentliche“, VERBORGENE, Orientierung dieses Teilchens im Raum VOR der eigentlichen Messung der Orientierung in Erfahrung bringen? Messen können wir sie offenbar nicht, da wir nicht vor der Messung messen können! („You can’t have your cake and eat it too…“)

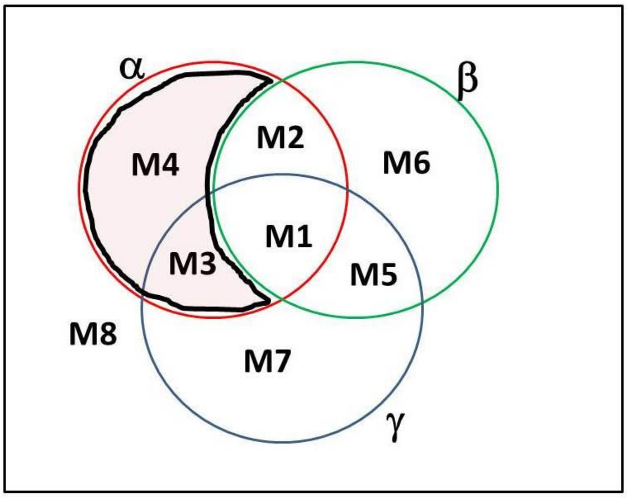
5) Einstein, Podolsky und Rosen schlugen 1935 vor, zwei miteinander „verschränkte“ Teilchen zu nehmen. Die Erzeugung (z.B. in einem radioaktiven Prozess) der auseinanderfliegenden „verschränkten“ Teilchen garantiert, dass bei Messungen der Spin-Wert des einen Teilchens immer genau umgekehrt zum Wert des anderen Teilchens herauskommt, auch wenn die Teilchen zum Zeitpunkt der Messung schon weit auseinandergeflogen sind. Wenn wir also jetzt z.B. am linken Teilchen die Messung eine Millisekunde früher machen, als am anderen, rechten, Teilchen, dann können wir offenbar sagen, welcher Spin-Wert am rechten Teilchen vorliegt, bevor der Wert dort gemessen wird! Die Messung am linken Teilchen wirkt wie eine heimliche Beobachtung auch des rechten Teilchens, von der aber dieses rechte Teilchen nichts merkt! Es „merkt“ die Messung selbst ja erst eine Millisekunde später, wenn es selbst in die (rechte) Messapparatur kommt.

6) Wir nehmen nun zwei getrennte Messapparaturen für die nach links und nach rechts fliegenden Teilchen, und stellen sie jeweils zufällig abwechselnd auf einen von drei Winkeln α,β,γ ein. Dann stellen wir Tabellen auf für die Zwei-Teilchen-Messergebnisse, etwa wie: „rechts: Winkel α, positiv; links: Winkel β, negativ“. Hier bedeuten „positiv“ und „negativ“ natürlich die zwei möglichen gemessenen Spineinstellungen, entweder parallel(+) oder antiparallel(-) zur Richtung, die durch die Messapparatur (Polarisationsmessung) vorgegeben ist (sog. Stern-Gerlach-Versuch).

7) Die Messung am linken Teilchen wirkt ja so, als könnten wir am rechten Teilchen nacheinander zweimal messen, einmal „heimlich“, und dann „offiziell“. Hieraus lässt sich dann aber offenbar schließen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das rechte Teilchen nacheinander („heimlich“) durch zwei verschiedene Winkelstellungen α,β (bzw. γ) fliegend dabei die „verborgenen“ Messwerte geliefert hätte: (+,+), (+,-), (-,+), (-,-). **John Bell** hat 1964 für die möglichen Wahrscheinlichkeiten eine **Ungleichung** formuliert, die sich für das rechte Teilchen

so schreiben lässt: **R(α+,β-) <= R(α+,γ-) + R(γ +,β-)**, in Worten: *Die Wahrscheinlichkeit (bzw. relative Häufigkeit), dass rechte Teilchen (offiziell) mit „+“ durch Polarisator-Winkel α und (davor heimlich) mit „-“ durch Polarisator-Winkel β gehen, ist kleiner oder höchstens gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die Teilchen mit „+“ durch α und mit „-“ durch γ gehen, und dazu addiert die Wahrscheinlichkeit, dass Teilchen mit „+“ durch γ und mit „-“ durch β gehen.*

8) Wir können die **Bell’sche Ungleichung R(α+,β-) <= R(α+,γ-) + R(γ+,β-)** grafisch leicht veranschaulichen. **R(α+,β-)** kann hierbei also gelesen werden als: „Rechtes Teilchen würde Winkel α positiv, aber Winkel β negativ passieren“.



Hier stehen die drei Kreise für die drei Winkel **α,β,γ**. Die von den Kreisabschnitten begrenzten 8 Bereiche bedeuten Folgendes. Eine Anzahl von M1 aus der Gesamtzahl der gemessenen rechten Teilchen würde alle drei Polarisator-Winkel **α,β,γ** positiv passieren. M8 dagegen: negative Wertung für alle drei Winkel. M3 ist also positiv für α und γ, aber negativ für β. M4 ist ebenfalls positiv für α, aber negativ für β und γ. Somit sind M3 und M4 positiv für α und negativ für β. Der mit einem schwarzen Halbmond markierte Bereich M3+M4= **R(α+,β-)** entspricht dann der linken Seite der Ungleichung, die rechte Seite mit **R(α+,γ-)**=M4+M2 und **R(γ+,β-)**=M3+M7 ist entsprechend um die Bereiche M2 und M7 vergrößert. Diese Grafik macht die Bell’sche Ungleichung ganz anschaulich.

9) Es ist also eigentlich gar nicht vorstellbar, dass diese Ungleichung durch irgendein Experiment in Frage gestellt werden könnte. Aber dennoch: Die Messungen für quantenmechanisch miteinander verschränkte Teilchen zeigen eine eklatante Verletzung dieser Ungleichung! Die einzige noch einigermaßen plausible – wenn auch unheimliche – Erklärung hierfür lautet, dass die beiden miteinander verschränkten Teilchen eben doch über beliebige Distanzen so miteinander verbunden sind, als wären sie ein einziges Objekt und nicht zwei separate Teilchen! Die Messung am Teilchen links beeinflusst also auch das Teilchen rechts.

Heiner Müller-Krumbhaar

Fußnote:
Die Ungleichung hier: R(α+,β-) <= R(α+,γ-) + R(γ+,β-), bei der beide Argumente die verborgene Eigenschaft des rechten Teilchens beschreiben, ist natürlich identisch mit der Ungleichung N_{12}(α+,β+) <= N_{12}(α+,γ+) + N_{12}(γ+,β+) aus Franz Schwabls Buch *Quantenmechanik,* Kapitel 20, Gleichung 20.72, wobei dort allerdings das erste Argument für das rechte Teilchen, das zweite Argument aber für das linke Teilchen zu lesen ist. In Worten:
R(α+,β-) gelesen als: „Rechtes Teilchen würde Winkel α positiv, aber Winkel β negativ passieren“, dagegen N_{12}(α+,β+): „Rechtes Teilchen würde Winkel α positiv, aber linkes Teilchen Winkel β positiv passieren“.

Literatur: Franz Schwabel, Quantenmechanik, Springer Verlag 2007.