

Allgemeine Relativitätstheorie und GPS (Abschätzungen)

Einstein: Lichtgeschwindigkeit $C=300.000 \text{ km/sec} = \text{const!}$

Beobachtung: Erdradius $R=6400 \text{ km}$, Fallbeschleunigung $G = 10 \text{ m/sec}^2$

Satelliten-Geschwindigkeit erdnah $V = 8 \text{ km/sec}$, wegen $V^2=G \cdot R$

Falls Erdradius R_c nur $\sim 0,64 \text{ cm}$ wäre (gleiche Masse), dann Umlauf-Geschwindigkeit:

$$V_c \sim C = \text{Licht, denn } V_c^2 = V^2 \cdot (R/R_c) = V^2 \cdot 10^9 \cong C^2 !$$

Dies folgt aus **Kepler-Newton**: Erdbeschleunigung bzw. Kraft variiert wie:

$$G_c = G \cdot (R/R_c)^2 \text{ somit } V_c^2 = G_c \cdot R_c = G \cdot R^2/R_c = V^2 \cdot R/R_c .$$

Dann könnte das Licht nur noch um die Erde herum laufen, aber nicht mehr entkommen. Von weit außen wäre keine Bewegung mehr an der Oberfläche der dichten Mini-Erde zu erkennen, die Erd-Zeit stünde für den Beobachter still.

(Dies wäre ein "Schwarzes Loch". Der sog. **Schwarzschild-Radius** ergibt sich genauer zu $R_c=0,9 \text{ cm}$ wenn man die Umlaufgeschwindigkeit $V=8 \text{ km/s}$ durch die Fluchtgeschwindigkeit $V^*=V \cdot 2^{1/2} = 11,2 \text{ km/s}$ ersetzt).

Zeitdilatation: Relativ-Korrektur $\sim (V/C)^2$ (Quadrat, da vorzeichenunabhängig)

An der Erdoberfläche mit $R=6400 \text{ km}$ und $V=8 \text{ km/sec}$ also:

Relativistische Zeitänderung $\Delta \sim (V/C)^2 \sim 10^{-9}$, ca. 100 Mikrosec/Tag.

(genauer: $\Delta=0.445 \cdot 10^{-9}$, ein Tag hat $t=86.400$ Sekunden, ergibt $\Delta\tau=38 \text{ Mikrosec/Tag}$)

Da GPS-Satelliten 20.000 km höher, ist Erd-Zeit relativ dazu verlangsamt.

Folge: Fehler der GPS-Position eines Flugzeugs am Tag: $\Delta X = C \cdot \Delta\tau \sim 10 \text{ km}$

Daher wird im GPS die Allgemeine Relativitätstheorie als Korrektur berücksichtigt!